Nierówności między średnimi

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

- Średnia kwadratowa

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

- Średnia arytmetyczna

$$\sqrt[n]{a_1 * \dots * a_n}$$

- Średnia geometryczna

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

- Średnia harmoniczna

Nierówności między nimi prezentują się następująco:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ \dots + \ a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 * \dots * a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ \dots + \ \frac{1}{a_n}}$$

$a_1, \dots, a_n > 0$, n- liczba elementów

Równość zajedzie dla $a_1 = \dots = a_n$

Zwane są też nierównościami Cauchy'ego od nazwiska francuskiego matematyka, który je dowiódł.

Dowody tych nierówności dla dwóch elementów a,b

1) Nierówność między średnia kwadratową, a arytmetyczną

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \quad /()^2$$

$$\frac{a^2+\ b^2}{2} \geq \frac{a^2+\ 2ab+\ b^2}{4} \quad /*4$$

$$2a^2+\ 2b^2\ \geq a^2+\ 2ab+\ b^2$$

$$a^2-\ 2ab+\ b^2\ \geq 0$$

$$(a-b)^2\ \geq 0$$

2) Nierówność między średnia arytmetyczną, a geometryczną

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad /()^2$$

$$\frac{a^2+2ab+\ b^2}{4} \geq ab \quad /*4$$

$$a^2+2ab+\ b^2 \geq 4ab$$

$$a^2-\ 2ab+\ b^2\ \geq 0$$

$$(a-b)^2\ \geq 0$$

3) Nierówność między średnią geometryczną i harmoniczną

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b} \quad /()^2$$

$$ab \geq \frac{4a^2b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Zadania

1. $1 + a \geq 2\sqrt{a}$ $\quad a \geq 0$

$1 + a \geq 2\sqrt{a}$ /:2

$$\frac{a+1}{2} \geq \sqrt{a} = \sqrt{a * 1}$$

2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ $\quad a, b > 0$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ /:2

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq 1 = \sqrt{\frac{a}{b} * \frac{b}{a}}$$

3. $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12 \quad a, b, c \geq 0, \qquad a + b + c = 6$

Rozważmy nierówność między średnią kwadratową i arytmetyczną dla a, b, c

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} = \frac{6}{3} = 2 \quad /()^2$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq 4 \quad /*3$$

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$ - Otrzymaliśmy tezę

4. Udowodnij, że: $a^2 + \frac{4}{a^4} \geq 3$ $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

$$a^2 + \frac{4}{a^4} \geq 3$$

$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{4}{a^4} \geq 3 \quad /:3$$

$$\frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{4}{a^4}}{3} \geq 1 = \sqrt[3]{\frac{a^2}{2} * \frac{a^2}{2} * \frac{4}{a^4}}$$

Dla jakiego a zajdzie równość?

$$\frac{a^2}{2} = \frac{4}{a^4} \quad /* 2a^4$$

$$a^6 = 8 \quad /\sqrt[6]{}$$

$$a = \sqrt{2}$$

Olimpiada o „Diamentowy indeks AGH” II etap 20/21

5. Udowodnij, że: $\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$

$s = a_1 + \ldots + a_n$, $a_1, \ldots, a_n > 0$

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1} \quad / + n$$

$$\frac{s-a_1+a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{s-a_n+a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1} + n$$

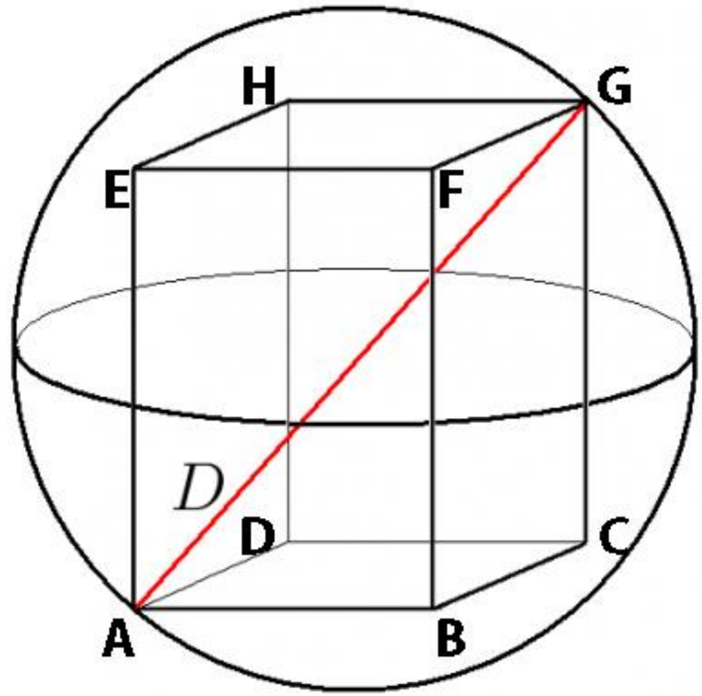
$$s * \left(\frac{1}{s-a_1} + \ldots + \frac{1}{s-a_n}\right) \geq \frac{n^2}{n-1} \quad / * (n-1) : \left(\frac{1}{s-a_1} + \ldots + \frac{1}{s-a_n}\right) : n$$

$$\frac{s*(n-1)}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{s-a_1} + \ldots + \frac{1}{s-a_n}}$$

$$\frac{(s-a_1) + \ldots + (s-a_n)}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{s-a_1} + \ldots + \frac{1}{s-a_n}}$$

Zauważmy, że lewa strona to średnia arytmetyczna, a prawa to średnia harmoniczna.

6. Wyznacz maksymalną objętość prostopadłościanu wpisanego w kule o promieniu równym 5.



$$|AG| = 2 * 5 = 10 \qquad V = |AB| * |BC| * |CG|$$

$$|AG|^2 = |AC|^2 + |CG|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CG|^2$$

$$100 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CG|^2$$

Z nierówności między średnią kwadratową, a geometryczną:

$$\sqrt{\frac{|AB|^2 + |BC|^2 + |CG|^2}{3}} \geq \sqrt[3]{|AB| * |BC| * |CG|}$$

$$\sqrt{\frac{100}{3}} \geq \sqrt[3]{|AB| * |BC| * |CG|} \quad /(\ )^3$$

$$\frac{100\sqrt{3}}{9} \geq |AB| * |BC| * |CG|$$

Maksymalna objętość to: $\frac{100\sqrt{3}}{9}$

Dziękuję za uwagę!

Maciej Makowski